

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

Научная статья  
УДК 574.34:517.925.4

### ИЗУЧЕНИЕ УСЛОВИЙ ВОЗНИКНОВЕНИЯ СЛОЖНЫХ РЕЖИМОВ ДИНАМИКИ В БЫСТРО-МЕДЛЕННОЙ МОДЕЛИ МИГРАЦИОННО СВЯЗАННЫХ СООБЩЕСТВ

Е.В. Курилова, М.П. Кулаков

Институт комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН,  
ул. Шолом-Алейхема 4, г. Биробиджан, 679016,  
e-mail: [katkurilova@mail.ru](mailto:katkurilova@mail.ru), [k\\_matvey@mail.ru](mailto:k_matvey@mail.ru)

*Работа посвящена изучению динамики быстро-медленной системы, состоящей из двух неидентичных миграционно связанных сообществ «хищник – жертва». Подробно исследуются механизмы формирования сложных пространственно-временных структур в случае слабой связи между сильно отличающимися сообществами, динамика которых оказывается несинхронной либо частично синхронной.*

**Ключевые слова:** хищник – жертва, миграция, синхронизация, пачечная и тоническая динамика.

**Образец цитирования:** Курилова Е.В., Кулаков М.П. Изучение условий возникновения сложных режимов динамики в быстро-медленной модели миграционно связанных сообществ // Региональные проблемы. 2022. Т. 25, № 3. С. 174–176. DOI: 10.31433/2618-9593-2022-25-3-174-176

Рассматривается модель динамики двух миграционно связанных сообществ «хищник – жертва»:

$$\begin{cases} \frac{d x_1}{d t} = x_1(1 - a x_1) - \frac{x_1 y_1}{1 + h x_1}, \\ \frac{d y_1}{d t} = -c_1 y_1 + \frac{c_1 x_1 y_1}{1 + h x_1} + c_1 m \left( \frac{c_1}{c_2} y_2 - y_1 \right), \\ \frac{d x_2}{d t} = x_2(1 - a x_2) - \frac{x_2 y_2}{1 + h x_2}, \\ \frac{d y_2}{d t} = -c_2 y_2 + \frac{c_2 x_2 y_2}{1 + h x_2} + c_2 m \left( \frac{c_2}{c_1} y_1 - y_2 \right), \end{cases} \quad (1)$$

где  $x_i$  и  $y_i$  – численности жертв и хищников на  $i$ -й территории ( $i=1, 2$ ),  $a$  – коэффициент самолимитирования жертвы,  $h$  – коэффициент насыщения хищника,  $c_i$  – относительная скорость снижения (убыли) численности хищников (смертности) и  $m c_i$  – коэффициент миграции хищников ( $i=1, 2$ ) [1, 2].

В системе (1) предполагается, что два неидентичных сообщества, которые отличаются

параметрами скорости роста жертв, оказываются подобны сообществам с разной смертностью хищников. Модель (1) и ее модификации встречаются у некоторых исследователей [3, 4], которые, к сожалению, ограничиваются локальным анализом устойчивости и изучением условий однородного распределения особей по ареалу. Данное исследование концентрируется на случае неоднородного распределения, которое проявляется в сложных нелинейных эффектах, связанных с эволюцией периодических режимов, при которых сообщества оказываются несинхронными либо демонстрируют частичную синхронизацию.

Исследование эффектов синхронизации регулярных колебаний, возникающих в системе (1), выявило несколько особенностей. Во-первых, полная синхронизация циклов на разных территориях в такой системе возможна в случае сильной связи ( $m > 0.5$ ), даже при значительной разнице между сообществами ( $c_1 \ll c_2$ ). Однако это приводит к единственно возможному типу динамики – предельному циклу. Во-вторых, снижение силы связи приводит к очень быстрой десинхронизации

ции, при которой каждое сообщество испытывает колебания численности с собственным ритмом. При этом даже мало отличающиеся сообщества ( $c_1 \approx c_2$ ) неспособны к полной синхронизации при слабой связи, в результате чего формируется двух-частотный предельный цикл с иррациональным отношением частот (числа вращения). Другими словами, было показано, что при слабой связи ( $m > 0.01$ ) синхронизация фактически возможна лишь для идентичных сообществ [1]. Однако, дальнейшее исследование модели (1) показало, что слабо связанные неидентичные сообщества способны, по крайней мере, к частичной синхронизации именно в случае большой разницы между значениями смертности хищников. В этом случае периоды оказываются кратными, причем таким образом, что в разные моменты времени наблюдаются участки с синфазной или противофазной динамикой популяций жертв и хищников на разных территориях, а также с разным соотношением их численности. Кроме того, были обнаружены режимы динамики, состоящие из чередующихся участков медленного «дрейфа» траектории и быстрых ее «срывов» [2].

В случае значительной разницы между сообществами, т.е. при  $c_1 \ll c_2$ , модель (1) относится к классу быстро-медленных систем, в которых присутствуют процессы, протекающие в разных временных масштабах.

Согласно геометрическому методу исследования быстро-медленных систем, разделение полной модели на быстрые и медленные подсистемы и их детальное изучение позволило определить, что динамика сильного сообщества, представляющего собой медленную подсистему, полностью определяет поведение слабого сообщества, соответствующего быстрой подсистеме. Оказалось, что динамика быстрого сообщества сильно зависит от численности хищников в медленном. Другими словами, численность хищников в медленной подсистеме можно рассматривать как бифуркационный параметр в быстрой подсистеме. Бифуркационный анализ этих подсистем позволил сконструировать инвариантные многообразия, на которых реализуются участки с пачечной и тонической активностью системы (1). В результате были подробно описаны механизмы возникновения пачек с различной формой волны. Обнаружена и описана зависимость формы быстрой динамики от внешнего вида инвариантного многообразия и расположения его частей относительно релаксационного цикла.

*Работа выполнена в рамках государственного задания Института комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН.*

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Кулаков М.П., Курилова Е.В., Фрисман Е.Я. Синхронизация, тоническая и пачечная динамика в модели двух сообществ «хищник-жертва», связанных миграциями хищника // Математическая биология и биоинформатика. 2019. Т. 14, № 2. С. 588–611. DOI: 10.17537/2019.14.588
2. Курилова Е.В., Кулаков М.П. Квазипериодические режимы динамики в модели миграционно связанных сообществ «хищник-жертва» // Региональные проблемы. 2020. Т. 23, № 2. С. 3–11. DOI: 10.31433/2618-9593-2020-23-2-3-11
3. Ghosh S., Bhattacharyya S. A two-patch prey-predator model with food-gathering activity // J. Appl. Math. Comput. 2011. Vol. 37. P. 497–521. DOI: 10.1007/s12190-010-0446-z
4. Kang Y., Sasmal S.K., Messan K. A two-patch prey-predator model with predator dispersal driven by the predation strength // Mathematical Biosciences and Engineering. 2017. Vol. 14, N 4. P. 843–880. DOI:10.3934/mbe.2017046

#### REFERENCES:

1. Kulakov M.P., Kurilova E.V., Frisman E.Ya. Synchronization, tonic and burst dynamics in the model of two «predator-prey» communities connected by predator migrations. *Mathematical biology and bioinformatics*, 2019, vol. 14, no. 2, pp. 588–611. DOI: 10.17537/2019.14.588 (In Russ.).
2. Kurilova E.V., Kulakov M.P. Quasi-periodic regimes of dynamics in the «predator-prey» model of migration-related communities. *Regional'nye problemy*, 2020, vol. 23, no. 2, pp. 3–11. DOI: 10.31433/2618-9593-2020-23-2-3-11 (In Russ.).
3. Ghosh S., Bhattacharyya S. A two-patch prey-predator model with food-gathering activity. *J. Appl. Math. Comput.*, 2011, vol. 37, pp. 497–521. DOI: 10.1007/s12190-010-0446-z
4. Kang Y., Sasmal S.K., Messan K. A two-patch prey-predator model with predator dispersal driven by the predation strength. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 2017, vol. 14, no. 4. pp. 843–880. DOI:10.3934/mbe.2017046

STUDY OF CONDITIONS FOR COMPLEX DYNAMIC REGIMES  
IN THE FAST-SLOW MODEL OF COMMUNITIES COUPLED BY MIGRATION

E.V. Kurilova, M.P. Kulakov

*The paper deals with the study of dynamics of fast-slow system consisting of two non-identical communities «predator – prey» coupled by migration. We study the mechanisms that lead to the complex space-time structures in the case of a weak coupling between very different communities. The community dynamics in this case is non-synchronous or partially synchronous.*

**Keywords:** *predator – prey, migration, synchronization, burst and tonic dynamics.*

**Reference:** Kurilova E.V., Kulakov M.P. Study of conditions for complex dynamic regimes in the fast-slow model of communities coupled by migration. *Regional'nye problemy*, 2022, vol. 25, no. 3, pp. 174–176. (In Russ.). DOI: 10.31433/2618-9593-2022-25-3-174-176

*Поступила в редакцию 15.04.2022*

*Принята к публикации 15.09.2022*