МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ. БИОЛОГИЯ

Научная статья
УДК 517.9:574.34

СИНХРОНИЗАЦИЯ 2-ЦИКЛОВ ДЛЯ ТРЕХ МИГРАЦИОННО СВЯЗАННЫХ ПОПУЛЯЦИЙ

И.Г. Суходоев
Институт комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН,
ул. Шолом-Алейхема 4, г. Биробиджан, 679016,
e-mail: sukhodoevv@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0001-8399-3359

Работа посвящена изучению синхронизации колебаний в системе трех миграционно связанных популяций в кольцо. Модель динамики представляет собой систему трех идентичных логистических отображений, которые диссипативно связаны между собой. Пользуясь качественными методами исследования динамических систем, построен полный фазовый портрет модели. Показано, что в фазовом пространстве существует несколько периодических точек, соответствующих синхронным и несинхронным циклам.

Ключевые слова: *популяция, миграция, циклы, синхронизация, фазовый портрет, бифуркация.*

Образец цитирования: Суходоев И.Г. Синхронизация 2-циклов для трех миграционно связанных популяций // Региональные проблемы. 2024. Т. 27, № 3. С. 5–7. DOI: 10.31433/2618-9593-2024-27-3-5-7.

Рассматриваются уравнения динамики численности трех миграционно связанных популяций:

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n)(1-2m) + m(f(y_n) + f(z_n)), \\ y_{n+1} = f(y_n)(1-2m) + m(f(x_n) + f(z_n)), \\ z_{n+1} = f(z_n)(1-2m) + m(f(x_n) + f(y_n)), \end{cases} \qquad (1)$$

где x_n, y_n и z_n – численности в n-й сезон размножения, m – коэффициент миграции ($0 \le m \le 0.5$), равный доле от численности каждой популяции после размножения, которые пополняют два связанных с ней участка. Функция $f(x)$ описывает локальный рост популяции со следующими свойствами: $f(0)=a$ и $df/dx<0$, где a – максимальная скорость роста популяции. Такой вид функции позволяет описать плотностную регуляцию численности: максимальный рост наблюдается при низкой численности, когда внутривидовая конкуренция за ресурсы минимальна, а с ростом численности конкуренция усиливается и рост замедляется.

Рассмотрим функцию f в виде дискретного аналога модели Ферхюльста, т.е. $f(x_n)=ax_n(1-x_n/K)$, где K – экологическая ниша популяции. Путем несложной замены переменных $Kx_n \to x_n$, $Ky_n \to y_n$, $Kz_n \to z_n$ от уравнений (1) можно перейти к модели с относительными численностями:

$$\begin{cases} x_{n+1} = a\, x_n(1-x_n)(1-2m) + \\ + a\, m(y_n(1-y_n) + z_n(1-z_n)), \\ y_{n+1} = a\, y_n(1-y_n)(1-2m) + \\ + a\, m(x_n(1-x_n) + z_n(1-z_n)), \\ z_{n+1} = a\, z_n(1-z_n)(1-2m) + \\ + a\, m(x_n(1-x_n) + y_n(1-y_n)). \end{cases} \qquad (2)$$

Система (2) имеет тривиальную $\bar{x}_0 = \bar{y}_0 = \bar{z}_0 = 0$ и нетривиальную $\bar{x}_1 = \bar{y}_1 = \bar{z}_1 = (a-1)/a = h$ неподвижные точки. Очевидно, что условия их устойчивости аналогичны условиями одномерного уравнения $x_{n+1}=ax_n(1-x_n/K)$: тривиальная точка устойчива при $0<a<1$, нетривиальная при $1<a<3$. Потеря устойчивости ненулевой точки происходит согласно каскаду удвоения периода, в результате которого при $3<a\le 4$ динамика демонстрирует пилообразные колебания численности

(циклы), подчиняющиеся универсальности Фейгенбаума.

В данной системе колебания численностей (циклы) демонстрируют фазовую мультистабильность. В этом случае в зависимости от начальных численностей формируются либо синхронные циклы, либо режимы, отличающиеся степенью фазовой синхронизации на смежных участках.

Показано, что 2-цикл помимо полностью синхронного варианта динамики трех популяций может иметь три варианта с двумя синхронными (синфазными) и одной несинхронной (несинфазной) им популяцией, в то время как для циклов больших длин, в том числе 3-цикла, динамика трех популяций может иметь сдвиг фазы колебаний (быть несинхронной). На примере 2- и 3-цикла показано, что при вариации скорости роста и коэффициента миграции происходит переход от состояния, когда возможна только синхронная динамика, к состоянию с двумя, а далее тремя несинхронными популяциями. В случае 2-цикла крайний вариант возможен только как часть переходной динамики.

Исследовано устройство фазового пространства в случае 2-цикла. Обнаружено, что каждая периодическая точка, соответствующая разным вариантам фазовой синхронизации, окружена набором седловых точек, которые задают бассейны притяжения разных вариантов совместной динамики. Можно предположить, что характер бифуркаций, приводящих к появлению этих точек, и, соответственно, сценарий усложнения динамики значительно отличаются от системы двух связанных популяций. Отметим, что несинхронная (несинфазная) динамика, наблюдаемая для трех популяций на основе 3-цикла, по всей видимости, возможна для трех и более популяций. Такой режим примечателен тем, что его можно представить как сдвиг одного и того же пика численности при движении особей по кругу. Примечательно, что это происходит в системе симметрично связанных популяций. Поэтому его исследование, например, методом фазовых портретов, предложенным в статье, имеет довольно заманчивые перспективы.

Работа выполнена в рамках государственного задания Института комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Суходоев И.Г., Кулаков М.П., Курилова Е.В., Фрисман Е.Я. Особенности синхронизации динамики в системе из трех миграционно связанных популяций // Региональные проблемы. 2024. Т. 27, № 1. С. 50–61. DOI: 10.31433/2618-9593-20224-27-1-50-61.
2. Кулаков М.П., Аксенович Т.И., Фрисман Е.Я. Подходы к описанию пространственной динамики миграционно-связанных популяций: анализ синхронизации циклов // Региональные проблемы. 2013. Т. 16, № 1. С. 5–15.
3. Earn D.J.D., Rohani P., Grenfell B.T. Persistence, chaos and synchrony in ecology and epidemiology // Proceedings of the Royal Society of London. Series B: Biological Sciences. 1998. Vol. 265, N 1390. P. 7–10. DOI: 10.1098/rspb.1998.0256.
4. England J.P., Krauskopf B., Osinga H.M. Computing One-Dimensional Stable Manifolds and Stable Sets of Planar Maps without the Inverse // SIAM Journal on Applied Dynamical Systems. 2004. Vol. 3, N 2. P. 161–190. DOI: 10.1137/030600131.

REFERENCES:

1. Sukhodoev I.G., Kulakov M.P., Kurilova E.V., Frisman E.Ya. Features of synchronization of dynamics in a system of three migration-related populations. *Regional'nye problemy*, 2024, vol. 27, no. 1, pp. 50–61. (In Russ.). DOI: 10.31433/2618-9593-20224-27-1-50-61.
2. Kulakov M.P., Aksenovich T.I., Frisman E.Ya. Approaches to describing the spatial dynamics of migration-related populations: analysis of cycle synchronization. *Regional'nye problemy*, 2013, vol. 16, no. 1, pp. 5–15. (In Russ.).
3. Earn D.J.D., Rohani P., Grenfell B.T. Persistence, chaos and synchrony in ecology and epidemiology. *Proceedings of the Royal Society of London. Series B: Biological Sciences*, 1998, vol. 265, no. 1390, pp. 7–10. DOI: 10.1098/rspb.1998.0256.
4. England J.P., Krauskopf B., Osinga H.M. Computing One-Dimensional Stable Manifolds and Stable Sets of Planar Maps without the Inverse. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 2004, vol. 3, no. 2, pp. 161–190. DOI: 10.1137/030600131.

SYNCHRONIZATION OF 2-CYCLES FOR THREE MIGRATION – CONNECTED POPULATIONS

I.G. Sukhodoev

The work deals with investigation of the oscillation synchronization in a system of three populations, migration – related in a ring. The dynamics model represents a system of three identical logistic dissipatively interconnected mappings. The author has constructed a complete phase portrait of the model using qualitative methods of dynamic systems study. It is shown that there are several periodic points in the phase space, corresponding to synchronous and asynchronous cycles.

Keywords*: population, migration, cycles, synchronization, phase portrait, bifurcation.*

Reference: Sukhodoev I.G. Synchronization of 2-cycles for three migration – connected populations. *Regional'nye problemy, 2*024, vol. 27, no. 3, pp. 5–7. (In Russ.). DOI: 10.31433/2618-9593-2024-27-3-5-7.

Поступила в редакцию 16.04.2024
Принята к публикации 17.09.2024