

## О ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЭФФЕКТА КЛАСТЕРИЗАЦИИ В СИСТЕМАХ СВЯЗАННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ДИНАМИКИ МЕТАПОПУЛЯЦИЙ

Кулаков М.П.

Институт комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН,  
ул. Шолом-Алейхема 4, г. Биробиджан, 679016,  
e-mail: k\_matvey@mail.ru

*Работа посвящена изучению явления кластеризации, проявляющегося в системах связанных отображений, рассматриваемых в качестве моделей динамики метапопуляций. Изучается возможность агрегации элементов каждого кластера суммарным или средним значением всех переменных в кластере. Показано, что в случае полностью синхронной или близкой к ней динамики в кластере, такие агрегированные величины могут быть описаны или аппроксимированы системой намного меньшего числа переменных (по числу кластеров). Предлагается использовать предложенную аппроксимацию для описания динамики реальных метапопуляций.*

**Ключевые слова:** метапопуляция, мультистабильность, системы связанных отображений, синхронизация, кластеризация, аппроксимация.

Хорошо известно, что ареалы большинства реальных биологических популяций или сообществ фрагментированы и представлены примыкающими друг к другу субареалами с проживающими в них локальными популяциями (или субпопуляциями), которые связаны между собой миграционными потоками. Системы таких субпопуляций принято называть метапопуляциями [8,13]. Очевидно, что ее динамика будет намного более сложная, чем у одиночной локальной популяции или локального биологического сообщества. Для локальных популяций любые изменения численности, в том числе периодическая и нерегулярная динамика, могут объясняться внутривидовыми процессами, такими как плотностно-зависимое лимитирование, периодическое изменение внешних факторов, межвидовое взаимодействие или сложный половозрастной состав. При переходе к пространственно-распределенным популяциям или метапопуляциям, состоящих из взаимодействующих локальных групп особей, сам факт пространственного распределения является мощным фактором усложнения динамики численности.

Распространен подход, когда для описания и исследования пространственно-временной динамики метапопуляций используют системы или решетки связанных отображений [3–6, 10, 11, 16, 17, 19], которые обладают богатой феноменологией. Отмечена мультистабильность динамических режимов [2, 3, 6, 7, 16] и связанное с ней явление кластеризации [1, 9, 12, 14, 15, 18, 19], которое применительно к модельному объекту – метапопуляции, заключается в образовании групп «мелких» популяций с синхронной динамикой, внешне не отличимых от «больших» локальных популяций.

Цель данного исследования является разработка подходов к использованию феномена кластеризации для описания динамики реальных метапопуляций, а также изучение возможности агрегации и упрощения модельных уравнений численности на основе данного явления.

### Системы связанных отображений и кластеризация

В самом простейшем случае (рис. 1а), прямоугольный плоский ареал можно представить системой примыкающих друг к другу субареалов, в каждом из которых проживает локальная популяция одного вида (или субпопуляция), связанная с другими таким же субпопуляциями миграционными переходами. На рис. 1а показан пример ареала такой модельной метапопуляции, где каждый квадрат – это субареал с плотностью особей в  $n$ -й сезон равной  $x_n^{(i)}$  ( $i=1,2,\dots,N$ ). Предположим, что рост субпопуляции имеет плотностно-зависимое регулирование, тогда для описания динамики в отсутствие миграции можно воспользоваться логистическим уравнением вида:  $x_{n+1}^{(i)} = f(x_n^{(i)})$ . Например, зависимостью запас-пополнение Рикера:

$$x_{n+1}^{(i)} = f(x_n^{(i)}) = ax_n^{(i)} \exp(-x_n^{(i)}), \quad (1)$$

где  $a$  – репродуктивный потенциал или скорость роста,  $n$  – сезон размножения или дискретное время.

В местах контакта субареалов происходят миграционный дрейф особей, отмеченный на рис. 1а стрелками. Число эмигрантов из  $j$ -й субпопуляции считается прямо пропорциональным плотности особей в ней, а коэффициент пропорциональности  $m_{i,j}$  ( $i=1,2,\dots,N, j=1,2,\dots,N$ ), равный доли особей эмигрирующих из  $j$ -й субпопуляции в  $i$ -ю, прямо зависит от длин границ с соседними субпопуляциями.

В работах [2, 3, 6] показано, что миграционное взаимодействие между локальными популяциями, динамика которых описывается уравнениями вида (1), может осуществляться различными способами – инерциальным и диссипативным, которые названы так в работе [2]. Если последний вариант связи способствует выравниванию мгновенных численностей, то первый не способен на это, а порой становится причиной флуктуаций численностей даже в докритических областях [2].

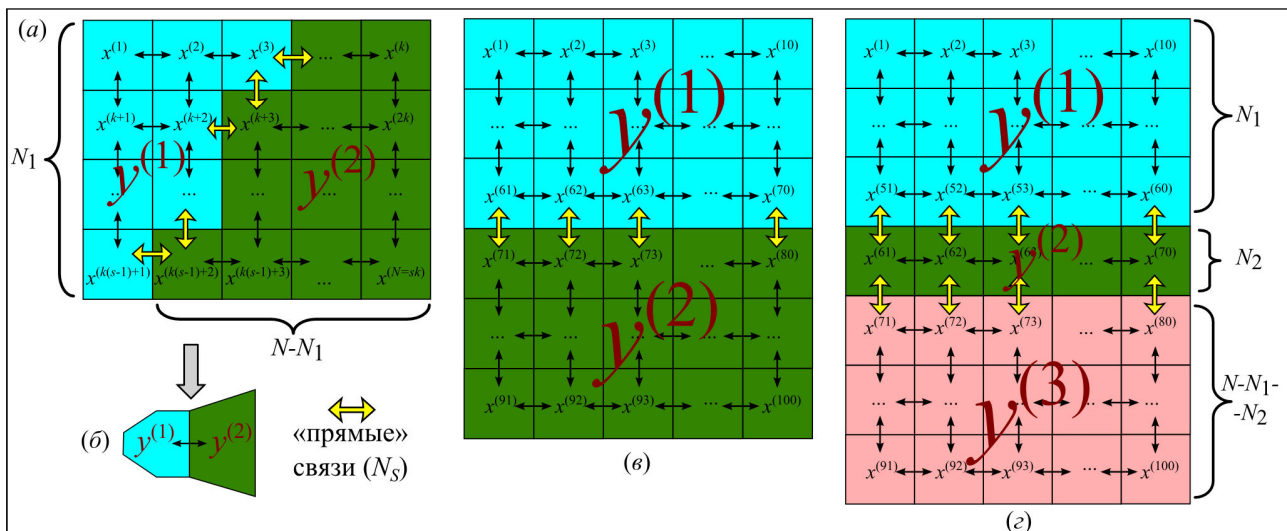


Рис. 1. Системы связанных идентичных популяций на ареале прямоугольной формы (а), (в). Образование двух или (г) трех кластеров

При первом способе, когда особи популяции мигрируют в обход процессам локального воспроизводства, наблюдаются преимущественно несинхронные режимы. При втором, когда особи мигрируют в промежутках между сезонами размножения, формируются преимущественно синхронные режимы [3]. Кроме того, в этом случае при больших значениях доли мигрантов появляется бистабильный режим динамики – несинхронный цикл длины 1 [3]. Третий вид миграционной связи состоит из комбинации двух первых. Во всех случаях отмечена сложная иерархия мультистабильных режимов и сложное устройство фазового пространства [3,6].

Ограничимся в дальнейшем диссипативным характером связи. В этом случае динамика метапопуляции может быть описана системой связанных отображений следующего вида:

$$x_{n+1}^{(i)} = \sum_{j=1}^N m_{i,j} f_j(x_n^{(j)}) \quad (i=1, 2, \dots, N). \quad (2)$$

В модели (2) предполагается, что динамика каждой субпопуляции складывается из динамик всех остальных, с кем она непосредственно связана. В системе (2) выделяется коэффициент  $m_{i,i} = 1 - \sum_{j=1, j \neq i}^N m_{j,i}$ , который указывает на вклад локальной динамики, определяемой одиночным уравнением (1), в динамику  $i$ -го элемента после его взаимодействия со всеми остальными, равной доли особей, оставшихся в  $i$ -й субпопуляции после эмиграции. Связь в системе (2) носит полностью симметричный характер, т.е. не учитывается смертность в ходе миграции, а все те особи, которые покинули  $j$ -ю субпопуляцию полностью (без потерь), в равных долях пополняют

другие. В этом случае очевидно, что  $\sum_{j=1}^N x_{n+1}^{(j)} = \sum_{j=1}^N f(x_n^{(j)})$ .

В случае, показанном на рис. 1а, все субареалы имеют равные площади, следовательно, равными оказываются границы между соседними субареалами и емкостями

среды, которые определяют максимально возможную численность субпопуляции в каждом из них. В этом случае можно записать, что

$$m_{i,j} = \begin{cases} m, & i \neq j \\ 0, & \text{для несвязанных субпопуляций} \\ 1 - \sum_{j=1, j \neq i}^N m_{j,i}, & i = j \end{cases}, \quad (3)$$

где нулевые значения коэффициентов связи (3) указывают на то, что соответствующие локальные субпопуляции не связаны, а их субареалы не смежны. В этом случае все  $f_j$  в (2) будут равны.

В моделях вида (2), помимо явного усложнения динамических режимов, появления предельных структур типа инвариантных кривых или странных аттракторов, отмечен ряд интересных феноменов. В частности, возникает проблема глобальной устойчивости, мультистабильности динамических режимов и кластеризации [1, 9, 10, 14, 18]. В целом данные явления выражаются в том, что при одних и тех же значениях популяционных параметров возможно возникновение принципиально разных динамических режимов или траекторий в зависимости от начальной численности.

Вместе с тем, явное использование систем связанных отображений для поставленной цели затруднительно, что объясняется необходимостью использовать большее число параметров (по числу уравнений и количеству прямых миграционных связей). Ранее в работах [4, 5, 11] предпринимались попытки использования таких моделей для описания динамики численности некоторых видов копытных, причем таким образом, что для описания динамики четырех связанных популяций потребовалось 4 демографических параметра, 4 характеризующих емкость среды и 12 коэффициентов миграции.

Несмотря на все трудности, возникающие при использовании систем связанных отображений, они демонстрируют интересное явление – кластеризация, которая заключается в том, что в ходе своей эволюции в систе-

ме (2) образуются группы рядом стоящих переменных [9, 13, 15, 18]. Главным признаком объединения переменных в группы или кластеры является синхронность их динамики, по крайней мере, с совпадением частоты и фазы колебаний. Такое явление в системе (2) очень похоже на формирование в метапопуляциях устойчивых ядерных группировок особей, окруженных флуктуирующими спутниковыми популяциями [8, 13]. Выделение таких групп, которые также будем называть кластерами, на фоне всей популяции возможно именно благодаря синхронному поведению внутри нее, когда эта группа воспринимается как целая популяция, а не группа связанных популяций.

Формирование подобных групп или кластеров однозначно, хотя и достаточно не тривиально, определяется начальным распределением особей по ареалу. Изначально неравные плотности каждой субпопуляции не всегда приводят к формированию несинхронной динамики каждой из них, а равные начальные плотности не гарантируют синхронной динамики, особенно при различных видах связи (диссипативная или инерциальная) и их комбинациях. Изучение такой зависимости выходит за рамки данной работы, и поэтому в дальнейшем будем рассматривать конкретные виды кластеров, не акцентируя внимания на условия и закономерности их возникновения.

#### Аппроксимация динамики кластеров

Рассмотрим явление кластеризации на примере двух и трехкластерных состояний.

Пусть некоторые начальные значения переменных  $x_0^{(i)}$  системы (2) сформировали два кластера, выделенные на рис. 1а двумя разными цветами. Будем описывать свойства этих кластеров числом элементов их образующих ( $N_1$  и  $N-N_1$ ), а также количеством «прямых» связей между кластерами ( $N_S$ ), т.е. миграционных переходов между субпопуляциями на границе кластера. Такие связи показаны на рис. 1а толстыми стрелками.

Обозначим через  $y_n^{(1)}$  и  $y_n^{(2)}$  суммарную численность особей каждого кластера в  $n$ -й сезон. Тогда несложно показать, что в асимптотическом случае ( $n \rightarrow \infty$ ), когда в метапопуляции образуется два кластера с полностью синхронной динамикой или близкой к ней, динамика всей системы связанных популяций можно аппроксимировать системой двух переменных следующего вида:

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(1)} = \left(1 - \frac{N_S}{N_1} m\right) f_1(y_n^{(1)}) + \frac{N_S}{N-N_1} m f_2(y_n^{(2)}) \\ y_{n+1}^{(2)} = \left(1 - \frac{N_S}{N-N_1} m\right) f_2(y_n^{(2)}) + \frac{N_S}{N_1} m f_1(y_n^{(1)}) \end{cases} \quad (4)$$

Система (4) явно следует из предположения, что значения всех фазовых переменных, входящих в кластер, равны (или их динамика полностью синхронна), а сумма таких элементов равна новым переменным, т.е.

$$y_n^{(1)} = \sum_{N_1} x_n^{(i)}, \quad y_n^{(2)} = \sum_{N-N_1} x_n^{(i)}. \quad \text{Если } f \text{ в система (2) выбрана в}$$

виде (1), то  $f_1(y_n^{(1)}) = a y_n^{(1)} \exp\left(-\frac{1}{N_1} y_n^{(1)}\right)$  и

$$f_2(y_n^{(2)}) = a x_n^{(2)} \exp\left(-\frac{1}{N-N_1} y_n^{(2)}\right). \quad \text{Дробь в показателе степе-}$$

ни функций  $f_1$  и  $f_2$  означает, что экологическая ниша кластера, состоящего из локальных популяций, прямо зависит от его размера, т.е. числа локальных точечных популяций, образующих его. Чем больше размер кластера, тем большей численности может достичь группа популяций (кластер), описываемый одним из уравнений вида (4). На рис. 1б это проиллюстрировано двумя неравными соприкасающимися многоугольниками.

Таким образом, динамика системы симметрично связанных изначально идентичных осцилляторов (2), в которой образуются кластеры с полностью синхронными элементами, может быть приближена системой неидентичных несимметрично связанных элементов (4), ее будем в дальнейшем называть аппроксимирующей для системы (2).

Чтобы легче было соотносить динамику переменных системы (4) с переменными системы (2), логично проинтегрировать нормировку переменных:  $y^{(1)} \rightarrow \frac{1}{N_1} y^{(1)}$  и

$$y^{(2)} \rightarrow \frac{1}{N-N_1} y^{(2)}. \quad \text{В результате система (4) значительно}$$

упрощается:

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(1)} = \left(1 - \frac{N_S}{N_1} m\right) f(y_n^{(1)}) + \frac{N_S}{N_1} m f(y_n^{(2)}) \\ y_{n+1}^{(2)} = \left(1 - \frac{N_S}{N-N_1} m\right) f(y_n^{(2)}) + \frac{N_S}{N-N_1} m f(y_n^{(1)}) \end{cases} \quad (5)$$

и аппроксимирует средние значения численностей каждого кластера. Функции  $f$  в этом случае будут равны.

Однако, несмотря на возможность такой аппроксимации, в системах вида (2) к таким явлениям, как мультистабильность, синхронизация и кластеризация, добавляются «граничный эффект», который делает невозможным полную синхронизацию, особенно при больших значениях коэффициента миграции. Данное явление легко представить, если сравнить субпопуляции на границах и где-нибудь в центре кластеров (см. рис. 1). Если последние связаны лишь представителями своего кластера, с которыми они синфазны, то популяции на границе связаны с популяциями из другого кластера, с которым она уже несинфазна. В результате субпопуляции на границах и в центре кластеров имеют различные амплитуды колебания (рис. 2 и 3).

Граничный эффект продемонстрирован на рис. 2а, на нем по абсциссе отложен номер субпопуляции  $i = (p-1)k + q$ , где  $p$  и  $q$  – номера строки и столбца прямоугольной решетки, на пересечении которых расположена  $i$ -я субпопуляция ( $p=1,2,\dots,s$ ,  $q=1,2,\dots,k$ ), а по оси ординат значения численности  $x_n^{(i)}$  каждой из них. В результате для фиксированного номера сезона  $n$  получена кривая, представляющая собой построчную развертку распределений численностей метапопуляции на прямоугольном ареале (10 строк с 10 субареалами в каждой).

Каждая строка прямоугольной решетки системы (2) на рис. 2а отделена тонкой линией. Для того, чтобы по-

казать, что достигаемый период колебания равен 4, на данных графиках нанесено несколько десятков таких кривых, часть из которых сливается, и в результате достигнутой стационарной динамики на рисунке видно лишь четыре из них ( $n=\tau$ ,  $n=\tau+1$ ,  $n=\tau+2$ ,  $n=\tau+3$ , где  $\tau$  – любое достаточно большое натуральное число). Пересечение этих кривых указывает на смену фаз колебаний у двух сформированных в данном случае двух кластеров (с характеристиками  $N=100$ ,  $N_1=60$ ,  $N_2=10$ ), которые изображены на рис. 2в в плоскости  $(p, q)$  на  $n=\tau+2$  итерации. Высота каждого столбца указывает на достигаемое значение численности  $x_n^{(i)}$ . В данном случае форма кластеров выбрана так, чтобы граница между двумя кластерами проходила между целыми строками из субпопуляций (61–70 и 71–80), а из-за «граничного эффекта» амплитуда их колебаний отличается от амплитуды субпопуляций в центре кластеров.

Несмотря на отсутствие полной синхронизации, динамика 100 связанных популяций, демонстрирующая двухкластерную фазу, неплохо описывается системой (4) или (5) (рис. 2б). На рис. 2б показана динамика системы (5) и средних значений численностей каждого кластера

$$\tilde{y}_n^{(1)} = \frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} x_n^{(i)}, \quad \tilde{y}_n^{(2)} = \frac{1}{N - N_1} \sum_{i=N_1+1}^N x_n^{(i)},$$

где значения  $x_n^{(i)}$  вычисляются из системы (2). В этом случае максимальная ошибка отклонения (аппроксимации) сумм

$\tilde{y}_n^{(j)}$  от переменных  $y_n^{(j)}$  системы (5) при  $N_1=60$ ,  $N_2=10$ , выраженная в процентах, т.е.

$$100\% \cdot \max_n \left( \left| \tilde{x}_n^{(j)} - x_n^{(j)} \right| / \tilde{x}_n^{(j)} \right) \quad (j=1,2),$$

составляет 0,48 и 0,35% для первой и второй переменной соответственно. Рост параметра связи  $m$  приводит к достаточно сильному росту данной ошибки и тому, что колебания аппроксимирующих  $y_n^{(1)}$ ,  $y_n^{(2)}$  и средних численностей

$\tilde{y}_n^{(1)}$ ,  $\tilde{y}_n^{(2)}$  становятся менее синхронными (сохраняется лишь фаза). И продолжается это до тех пор, пока данный кластер вообще может существовать при выбранном начальном распределении. В этот момент происходит срыв синхронизации, и они начинают колебаться в иных фазах, а система (5) не способна больше аппроксимировать новые кластеры.

Несмотря на это, для новой конфигурации кластеров можно построить иную аппроксимирующую систему. Например, при иных начальных значениях численностей и/или иных параметрах может сформироваться три кластера, выстроенных линейно – один за другим (первый связан со вторым, второй с третьим, как на рис. 1г). Динамику такой цепочки кластеров можно аппроксимировать уже тремя уравнениями:

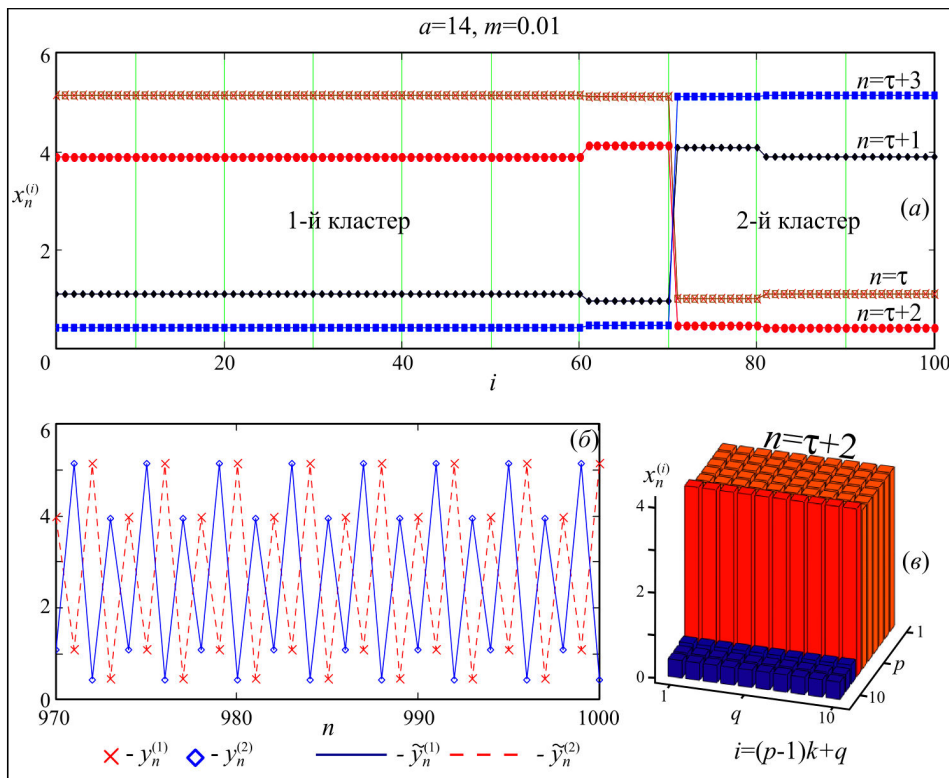


Рис. 2. Демонстрация «граничного эффекта» у двухкластерной фазы кластеризации, представленной (а) в развертке по строкам и (в) в пространственном расположении субпопуляций, где хорошо заметна неполная синхронизация; (б) сопоставление динамики системы (5) и средней плотности двух кластеров системы (2)

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(1)} = f_1(y_n^{(1)}) \left( 1 - \frac{N_{S_1}}{N_1} m \right) + \frac{N_{S_1}}{N_2} m f_2(y_n^{(2)}) \\ y_{n+1}^{(2)} = f_2(y_n^{(2)}) \left( 1 - \frac{N_{S_1} + N_{S_2}}{N_2} m \right) + \frac{N_{S_1}}{N_1} m f_1(y_n^{(1)}) + \frac{N_{S_2}}{N - N_1 - N_2} m f_3(y_n^{(3)}) \\ y_{n+1}^{(3)} = f_3(y_n^{(3)}) \left( 1 - \frac{N_{S_2}}{N - N_1 - N_2} m \right) + \frac{N_{S_2}}{N_2} m f_2(y_n^{(2)}) \end{cases}, \quad (6)$$

где  $f_1(y_n^{(1)}) = ay_n^{(1)} \exp\left(-\frac{1}{N_1} y_n^{(1)}\right)$ ,  $f_2(y_n^{(2)}) = ay_n^{(2)} \exp\left(-\frac{1}{N_2} y_n^{(2)}\right)$

и  $f_3(y_n^{(3)}) = ay_n^{(3)} \exp\left(-\frac{1}{N - N_1 - N_2} y_n^{(3)}\right)$ . Аналогично системе

(4) логично выполнить нормировку фазовых переменных

$y^{(1)} \rightarrow \frac{1}{N_1} y^{(1)}$ ,  $y^{(2)} \rightarrow \frac{1}{N_2} y^{(2)}$  и  $y^{(3)} \rightarrow \frac{1}{N - N_1 - N_2} y^{(3)}$ , ко-

торые сравнивать не с суммарными, а средними численностями в каждом кластере. Таким образом, после упрощения система (6) имеет вид:

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(1)} = f(y_n^{(1)}) \left( 1 - \frac{N_{S_1}}{N_1} m \right) + \frac{N_{S_1}}{N_2} m f(y_n^{(2)}) \\ y_{n+1}^{(2)} = f(y_n^{(2)}) \left( 1 - \frac{N_{S_1} + N_{S_2}}{N_2} m \right) + \frac{N_{S_1}}{N_1} m f(y_n^{(1)}) + \frac{N_{S_2}}{N_1} m f(y_n^{(3)}) \\ y_{n+1}^{(3)} = f(y_n^{(3)}) \left( 1 - \frac{N_{S_2}}{N - N_1 - N_2} m \right) + \frac{N_{S_2}}{N - N_1 - N_2} m f(y_n^{(2)}) \end{cases}. \quad (7)$$

Для случая, показанного на рис. 1з, кластеры имеют следующие характеристики:  $N=100$ ,  $N_1=60$ ,  $N_2=10$ ,  $N_{S_1}=10$  и  $N_{S_2}=10$ . На рис. 3 показана динамика числен-

ности в каждом субареале (рис. 3а и в) и средней численности каждого кластера, а также аппроксимирующая ее динамика системы (7) (рис. 3з). В данном случае максимальная ошибка аппроксимации более существенна (5,12, 1,87 и 3,99%), что сделано намеренно, и граничный эффект имеет более выраженный вид. Причем таким образом, что граничащие друг с другом популяции (с 51 по 80) имеют период колебаний в два раза меньше, чем популяции в центре кластера, а в самих кластерах динамика более неоднородна – нет полного совпадения численностей.

Как уже говорилось, рассматриваемая система связанных отображений (2) характеризуется мультистабильным характером своей динамики. Это означает, что после потери устойчивости и формирования периодической динамики система способна демонстрировать принципиально разные траектории, которые возможны одновременно и реализуются в зависимости от начальных численностей в каждом субареале. Каждая такая траектория соответствует своей конфигурации кластеров: от полностью синхронной динамики всех фазовых переменных системы (2) (когерентная фаза) до случая, когда формируются несколько кластеров, сопоставимых или нет по размеру (упорядоченная или частично упорядоченная фаза) или состоянию, когда динамика каждой переменной несинфазна переменной, с которой она непосредственно связана (турбулентная фаза). Поэтому исследование механизмов формирования кластеров часто сводится к исследованию таких траекторий на устойчивость, включающее построение областей притяжения и областей их существования в параметрическом

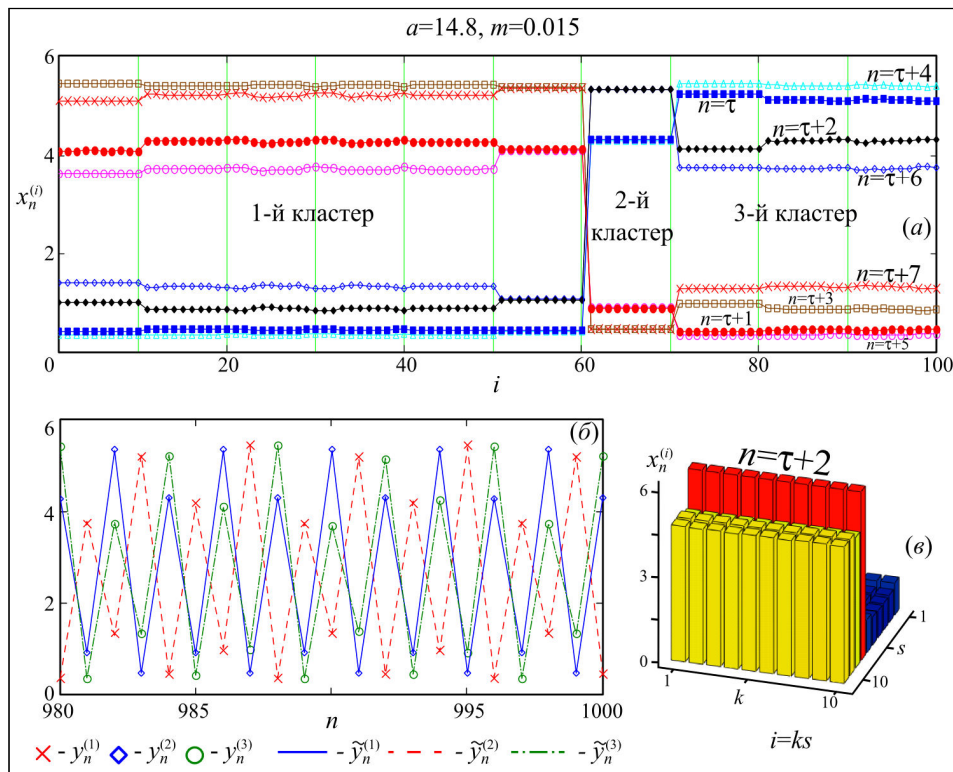


Рис. 3. Демонстрация «граничного эффекта» у трехкластерной фазы кластеризации (а), (в); сопоставление динамики системы (7) (б) и средних значений численности у трех неравных кластеров

пространстве, а также изучение механизмов их формирования и трансформации.

Такое исследование частично было выполнено для систем отображений связанных глобально [15, 17], а также для рассматриваемых в данной работе систем, связанных не глобально [4, 11]. Для последних было показано, что бифуркационные механизмы формирования двух кластеров полностью совпадают с механизмами формирования несинхронных режимов в аппроксимирующей системе – системе двух связанных отображений. Однако в отличие от систем, связанных глобально, граничный эффект и неполная синхронизация приводит к тому, что последующие бифуркации не совпадают.

Общность динамических свойств аппроксимирующих систем и кластеров в изучаемой системе (2) позволяет предположить, что для описания динамики связанных популяций, имеющих неравные площади субареалов вместо систем неидентичных отображений можно использовать системы полностью идентичных отображений, в которых образуются кластеры, по «форме» напоминающие эти неравные субареалы. В этом случае следует выбрать соответствующий способ покрытия ареала решеткой системы (2) и задать начальное распределение, приводящее к формированию кластеров, суммарная численность в которых должна описать динамику каждой субпопуляции. Естественно, в этом случае возникает проблема единственности такого покрытия и однозначного сопоставления характеристик кластеров, их площадей, формы, количества связей с другими и моделируемыми субареалами. В любом случае характер динамики будет определяться лишь двумя параметрами – скоростью роста и коэффициентом миграции.

#### Выводы

В работе на примере двухкластерных и трехкластерных состояний, возникающих в системах большого числа связанных отображений, показано, что динамика каждого кластера может быть описана (агрегирована) суммарным или средним значением переменных его образующих. Следовательно, эти агрегированные переменные можно рассмотреть как отдельные переменные, которые также будут связаны и в среднем описывать динамику цепочки из двух или трех кластеров. В случае полной или достаточно близкой к ней синхронизации динамики эти новые величины можно аппроксимировать системой намного меньшего числа переменных, чем исходной системы. Число новых переменных равно числу кластеров. Причем, если изначальная система связанных отображений состоит из полностью идентичных отображений и формируются неравные кластеры, то аппроксимирующая система представляет собой систему неидентичных уравнений с неравными коэффициентами миграции.

Предлагается использовать такую аппроксимацию для значительного упрощения модельных уравнений динамики реальных метапопуляций. С одной стороны, можно традиционным способом строить уравнения динамики численности каждой субпопуляции и каким-то способом их связывать так, что для каждого уравнения

потребуется свой набор популяционных, миграционных и параметров среды. С другой стороны, используя феномен кластеризации, можно подбирать решетку идентичных отображений, аппроксимация кластеров которой будет приводить к тем же или близким уравнениям, что потребует лишь двух параметров и начальных условий, приводящих к таким кластерам.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Иванова А.С., Кузнецов С.П. Волны кластеризации в цепочке систем, каждая из которых содержит набор элементов с внутренней глобальной связью // Изв. вузов «ПНД». 2003. Т. 11, № 4–5. С. 80–88.
2. Кузнецов С.П. Универсальность и подобие связанных систем Фейгенбаума // Изв. Вузов: Радиофизика. 1985. Т. 27, № 8. С. 991–1007.
3. Кулаков М.П., Аксенович Т.И., Фрисман Е.Я. Подходы к описанию пространственной динамики миграционно-связанных популяций: анализ синхронизации циклов // Региональные проблемы. 2013. Т. 16, № 1. С. 5–15.
4. Кулаков М.П., Ревуцкая О.Л. Применение метапопуляционного подхода к анализу пространственно-временной динамики промысловых животных // Фундаментальные и прикладные исследования в математической экологии и агроэкологии. Материалы международной школы-семинара. 2012. С. 94–98.
5. Кулаков М.П., Ревуцкая О.Л. Применение метапопуляционного подхода к анализу пространственно-временной динамики промысловых животных (на примере популяций кабана и изюбря) // Региональные проблемы. 2011. Т. 14, № 2. С. 12–20.
6. Кулаков М.П., Фрисман Е.Я. Синхронизация 2-циклов в системе симметрично связанных популяций, запас–пополнение в которых описывается функцией Рикера // Изв. вузов «ПНД». 2010. Т. 18, № 6. С. 25–41.
7. Таборов А.В. Частичная хаотическая синхронизация в системах связанных логистических отображений // Динам. системы. 2001. Вып. 17. С. 29–35.
8. Ecology, Genetics and Evolution of Metapopulations / Edited by Hanski Ilkka, Gaggiotti Oscar, London: Academic Press. 2004. 696 p.
9. Kaneko K. Clustering, coding, switching, hierarchical, ordering, and control in network of chaotic elements, Physica D. 1990. Vol. 41. P. 137–172.
10. Kaneko, K. Relevance of dynamic clustering to biological network, Physica D. 1994. Vol. 75. P. 55–73.
11. Kulakov M., Revutskaya O., Frisman E. Application of a metapopulation approach for analysis of space-time population dynamics (case study using ungulates) // iEMSs 2012 – Managing Resources of a Limited Planet: Proceedings of the 6th Biennial Meeting of the International Environmental Modelling and Software Society. 2012. P. 250–255.
12. Omelchenko I., Maistrenko Yr., Mosekilde E. Synhronization in ensembles of coupled maps with a major element // Discrete Dynamics in Nature and Society. 2005. No. 3. P. 239–255.

13. Opdam P. Metapopulation theory and habitat fragmentation: a review of holarctic breeding bird studies // *Landscape Ecology*. 1991. Vol. 5, No. 2. P. 93–106.
14. Oppo G.-L., Kapral R. Discrete models for the formation and evolution of spatial structure in dissipative systems // *Phys. Rev. A*. 1984. Vol. 33, No. 6. P. 4219–4231.
15. Popovych O., Pikovsky A., Maistrenko Yu. Cluster-splitting bifurcation in a system of coupled maps // *Physica D*. 2002. Vol. 168–169. P. 106–125.
16. Udvardi F.E., Raju N. Dynamics of Coupled Nonlinear Maps and Its Application to Ecological Modeling // *Applied mathematic and computation*. 1997. Vol. 82. P. 137–179.
17. Vanderlei Manica, Jacques A.L. Silva. Population distribution and synchronized dynamics in a metapopulation model in two geographic scales // *Mathematical Biosciences*. 2014. Vol. 250. P. 1–9.
18. Waller I., Kapral R. Spatial and temporal structure in systems of coupled nonlinear oscillators // *Phys. Rev. A*. 1986. Vol. 30, No. 4. P. 2047–2055.
19. Wysham D.B., Hastings A. Sudden Shift Ecological Systems: Intermittency and Transients in the Coupled Riker Population Model // *Bulletin of Mathematical Biology*. 2008. Vol. 70. P. 1013–1031.

*The article deals with the phenomenon of clusterization in coupled map lattices considered as simple models of metapopulation dynamics. The author investigates the opportunity of cluster elements aggregation by a summary or average value of all variables in the cluster. It is shown that in case of completely synchronous (or close to it) dynamics, such aggregate values can be described or approximated with the system of a considerably less in number variables (according to the number of clusters). It is proposed to use this approximation for the description of real metapopulations dynamics.*

**Key words:** *metapopulation, multistability, coupled map lattices, synchronization, clustering, approximation.*